HIMPUNAN KOMPAK PADA RUANG METRIK

Oleh :

Cece Kustiawan

Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA
Universitas Pendidikan Indonesia
cecekustiawan@yahoo.com

ABSTRACT

Makalah ini menyajikan definisi dan teorema-teorema himpunan kompak yang bertujuan untuk menentukan kekompakan suatu himpunan pada ruang metrik. Misalkan E adalah suatu himpunan yang tidak kosong pada ruang metrik (X,d). Akan ditentukan apakah E merupakan himpunan kompak atau bukan, yaitu dengan menggunakan definisi kompak atau dengan menggunakan teorema-teorema mengenai himpunan kompak.

Kata Kunci : Ruang Metrik, Persekitaran, Titik Limit, Interval Bersarang, Selimut Terbuka, Himpunan Terbuka, Himpunan Tertutup, dan Himpunan Terbatas.

This paper presents the definitions and theorems of compact set which aimed to determine the compactness of a set in a metric space. Suppose E is a non-empty set in a metric space (X, d). Be determined whether E is compact set or not, by using the definition of a compact set or use theorems on compact sets.

Keywords : Metric spaces, Neighborhood, Limit point, Nested interval, Open covering, Open set, Closed set, and Boundary set.

Pendahuluan

Untuk menentukan kekompakan suatu himpunan terlebih dahulu akan dibicarakan mengenai definisi ruang metrik, definisi selimut terbuka (open cover) untuk suatu himpunan, definisi himpunan kompak dan teorema-teorema pada himpunan kompak, antara lain; Teorema Heine-Borel, Teorema Bolzano-Weierstrass dan teorema-teorema yang lainnya yang berhubungan dengan himpunan kompak.

Definisi 1

Misalkan X himpunan yang tidak kosong. Fungsi $d : X \times X \to R$ disebut fungsi metrik (fungsi jarak) jika untuk setiap $p, q \in X$ berlaku :

(i) $d(p,q) \geq 0$
$d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
(ii) $d(p,q) = d(q,p)$
(iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q), \forall r \in X$.

Himpunan X dengan fungsi metrik d disebut *ruang metrik* dan ditulis dengan notasi (X,d).

Contoh

Himpunan $\mathbb{R}$ dengan metrik biasa d(x,y) = |x - y|, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik, sebab memenuhi ketiga sifat metrik pada Definisi 1.

Definisi 2

Selimut terbuka himpunan E pada ruang metrik (X,d) adalah keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha\}$ di X sehingga $E \subset \bigcup_{\alpha} G_\alpha$.

Contoh

(a) (X,d) = (R,d) ruang metrik biasa, E = (-1,1), $\{G_n\}_{n\in N} = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in N}$.

$\{G_n\}_{n\in N}$ adalah selimut terbuka untuk E sebab $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = (-1,1)$.

(b) (X,d) = (R,d) ruang metrik biasa, F = (0,1), $\{G_n\}_{n\in N} = \left\{\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in N}$.

$\{G_n\}_{n\in N}$ adalah selimut terbuka untuk F sebab $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = (0,1)$.

Definisi 3

Himpunan K dalam ruang metrik (X,d) dikatakan kompak jika setiap selimut terbuka untuk K memuat selimut bagian berhingganya untuk K.

Jadi himpunan T dalam ruang metrik (X,d) dikatakan tidak kompak jika ada selimut terbuka untuk T yang tidak memuat selimut bagian berhingganya untuk T.

Contoh

(a) (X,d) = ($\mathbb{R}$,d) ruang metrik biasa, himpunan F = (0,1) tidak kompak, sebab ada selimut terbuka untuk F yang tidak memuat selimut bagian berhingganya, yaitu $\{G_n\}_{n\in N} = \left\{\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in N}$ merupakan selimut terbuka untuk F tetapi $\bigcup_{n=1}^{k} G_n = \left(\frac{1}{k+2}, 1\right)$, $k \in N$ dan $F \not\subset \bigcup_{n=1}^{k} G_n$.

(b) Sedangkan H = [0,1] dengan metrik biasa merupakan himpunan kompak sebab setiap selimut terbuka untuk H memuat selimut bagian berhingganya untuk H.

Untuk lebih jelasnya silahkan ambil beberapa contoh selimut terbuka untuk H, tetapi itu bukan merupakan bukti.

Teorema 4

Jika K himpunan kompak dalam ruang metrik (X,d) maka K tertutup.

Bukti:

Diambil $p \in K^c$ sebarang, kemudian untuk setiap $q \in K$ dibuat persekitaran $V_r(p)$ dan $W_r(q)$ dengan jari-jari $r = \frac{1}{2}d(p,q)$ maka $V_r(p) \cap W_r(q) = \phi$. Jadi $\{W_r(q)\}_{q \in K}$ merupakan selimut terbuka untuk K. Karena K kompak maka ada $q_1, q_2, \cdots, q_n$ sehingga $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{ri}(q_i)$.

Misalkan $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_{ri}(q_i)$ dan $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{ri}(p)$ maka $W \cap V = \phi$ dengan W dan V terbuka. Akibatnya $K \cap V = \phi$ dan berarti $V \subset K^c$. Dengan kata lain terdapat himpunan terbuka V yang memuat p dengan sifat $V \subset K^c$. Hal ini berarti p titik interior K^c. Karena $p \in K^c$ sebarang maka K^c terbuka. Jadi K tertutup.

Teorema 5

Himpunan bagian tertutup dari himpunan kompak adalah kompak. Artinya jika K kompak, $B \subset K$ dan B tertutup maka B kompak.

Bukti:

Diambil sebarang selimut terbuka $\{G_\alpha\}$ untuk B. Karena B tertutup maka B^c terbuka. Akibatnya $\{G_\alpha\} \cup B^c$ merupakan selimut terbuka untuk K. Karena K kompak maka ada $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sehingga $K \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha i} \cup B^c \right)$. Dilain pihak $B \subset K$ maka diperoleh $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha i}$. Hal ini berarti B kompak.

Akibat 6

Jika F himpunan tertutup dan K kompak maka $F \cap K$ kompak.

Bukti:
Karena K kompak maka berdasarkan teorema 4, K tertutup. Dilain pihak F tertutup maka $F \cap K$ tertutup. Akibatnya $F \cap K$ himpunan bagian tertutup dari himpunan kompak K dan berdasarkan teorema 5, $F \cap K$ kompak.

Teorema 7

Jika $\{K_\alpha\}$ keluarga himpunan kompak pada ruang metrik (X,d) sehingga setiap keluarga bagian berhingganya mempunyai irisan tak kosong maka $\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \phi$.

Artinya jika K_α himpunan kompak untuk setiap α dan $\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha i} \neq \phi$ untuk setiap $n \in N$, maka $\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \phi$.

Bukti:
Diambil satu anggota keluarga tertentu sebarang misalnya K_{α_0}. Karena K_α kompak untuk setiap α maka K_α tertutup untuk setiap α. Misalkan $K_\alpha^c = G_\alpha$ maka G_α terbuka untuk setiap α. Akan diperlihatkan $K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha \right) \neq \phi$.

Andaikan $K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha \right) = \phi$ maka $K_{\alpha_0} \subset \left(\bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha^c = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} G_\alpha$.
Berarti $\{G_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ merupakan selimut terbuka untuk K_{α_0}. Karena K_{α_0} kompak maka ada $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sehingga $K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha i} = \bigcup_{i=1}^{n} K_{\alpha i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha i} \right)^c$. Dengan kata lain $K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha i} \right) = \phi$ atau $K_{\alpha_0} \cap K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n} = \phi$. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa setiap keluarga bagian berhingga mempunyai irisan tak kosong. Dengan demikian pengandaian salah dan haruslah $K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha \right) \neq \phi$ untuk setiap α. Karena K_{α_0} sebarang maka $\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \phi$.

Akibat 8

Jika $\{K_n\}_{n\geq 1}$ keluarga himpunan kompak yang tak kosong dengan $K_n \supset K_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$ maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi$.

Bukti:

Diketahui K_n himpunan kompak untuk setiap n. Karena $K_n \supset K_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\bigcap_{n=1}^{m} K_n = K_m$ dan berarti $\bigcap_{n=1}^{m} K_n \neq \phi$. Berdasarkan teorema 7 maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi$.

Teorema 9

Jika E himpunan bagian tak berhingga dalam himpunan kompak K maka E mempunyai titik limit di K.

Bukti:

Andaikan E tidak mempunyai titik limit di K. Jadi jika $p \in K$ maka p bukan titik limit dari E atau ada persekitaran $N_r(p)$ sehingga $N_r(p) \setminus \{p\} \cap E = \phi$. Dengan demikian setiap $N_r(p)$ tadi hanya memuat paling banyak satu titik anggota E yaitu titik p sendiri.

Jadi $\{N_r(p)\}_{p \in K}$ merupakan selimut terbuka untuk K dan juga merupakan selimut terbuka untuk E sebab $E \subset K$. Karena K kompak maka terdapat $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sehingga $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_r(p_i)$ dan juga $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_r(p_i)$. Padahal setiap $N_r(p_i)$ hanya memuat paling banyak satu anggota E dan ini berarti anggota E berhingga. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa E tak berhingga. Dengan demikian pengandaian salah dan haruslah E mempunyai titik limit di K.

Teorema 10

Jika $\{I_n\}$ barisan interval tertutup dan terbatas di $\mathbb{R}$ sehingga $I_n \supset I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

Bukti:
Misalkan $I_n = [a_n, b_n]$. Karena $I_n \supset I_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$ maka $a_1 \le a_2 \le \cdots \le b_1$. Dengan kata lain $\{a_n : n \in N\}$ terbatas ke atas oleh b_1 dan berakibat $\{a_n : n \in N\}$ mempunyai suprimum katakan $\xi = \sup \{a_n : n \in N\}$.
Jadi $a_n \le \xi$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. (1)

Selanjutnya akan ditunjukkan $\xi \le b_n$ untuk setiap $n \in N$. Diambil sebarang $n_0 \in \mathbb{N}$. Jika $n < n_0$ maka $a_n \le a_{n_0} \le b_{n_0}$ dan jika $n \ge n_0$ maka $a_n \le b_n \le b_{n_0}$. Jadi b_{n_0} batas atas $\{a_n : n \in N\}$. Akibatnya $\xi \le b_{n_0}$ dan karena $n_0 \in \mathbb{N}$ sebarang maka $\xi \le b_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. (2)
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $a_n \le \xi \le b_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ atau $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ atau $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \phi$.

Teorema 11

Jika $\{I_n\}$ barisan sel-k tertutup dan terbatas di R^k dengan k bilangan bulat positif sehingga $I_n \supset I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \phi$.

Bukti:

Misalkan $I_n = \{\overline{x} : \overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k), a_{nj} \le x_j \le b_{nj}, 1 \le j \le k, n \ge 1\}$.
Diambil $I_{nj} = [a_{nj}, b_{nj}]$ maka I_{nj} tertutup dan terbatas untuk setiap $n, j \in \mathbb{N}$. Karena $I_n \supset I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $I_{nj} \supset I_{(n+1)j}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$. Jadi $\{I_{nj}\}$ merupakan interval bersarang, tertutup dan terbatas, dan berdasarkan teorema 10 terdapat x_j^* sehingga $a_{nj} \le x_j^* \le b_{nj}$ untuk setiap $1 \le j \le k$, $n \ge 1$. Kemudian dibentuk $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*)$ maka $\overline{x}^* \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \phi$

Teorema 12

Setiap sel-k selalu kompak.

Bukti:
Diambil sebarang sel-k misalnya I yang memuat titik-titik $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ sehingga $a_j \le x_j \le b_j, 1 \le j \le k$. Misal δ adalah panjang diagonal dari sel I

tersebut yaitu $\delta = \left[\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Jadi untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in I$ berlaku $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$. Andaikan I tidak kompak maka ada selimut terbuka $\{G_\alpha\}$ untuk I yang tidak memuat selimut bagian berhingganya untuk I. Diambil $c_j = \frac{a_j + b_j}{2}$, $1 \le j \le k$ maka interval-interval $[a_j, c_j]$ dan $[c_j, b_j]$ membagi sel I menjadi 2^k bagian dan namakan setiap bagiannya itu dengan Q_i, $1 \le i \le 2^k$. Maka paling sedikit ada satu Q_i yang tidak diselimuti oleh keluarga bagian berhingga $\{G_\alpha\}$ dan sebut Q_i yang tidak diselimuti tadi oleh I_1. Kemudian I_1 dibagi lagi dengan mengambil $d_j = \frac{a_j + c_j}{2}$, $1 \le j \le k$, maka diantaranya ada yang tidak diselimuti oleh $\{G_\alpha\}$ dan namakan I_2. Jika proses diteruskan maka diperoleh

(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$

(b) I_n tidak dapat diselimuti oleh setiap keluarga bagian berhingga $\{G_\alpha\}$

(c) Jika $\bar{x}, \bar{y} \in I_n$ maka $|\bar{x} - \bar{y}| < 2^{-n}\delta$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sebab,

jika $\bar{x}, \bar{y} \in I$ berlaku $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$

jika $\bar{x}, \bar{y} \in I_1$ berlaku $|\bar{x} - \bar{y}| < 2^{-1}\delta$ (diagonal I_1 = $\frac{1}{2}$ diagonal I)

jika $\bar{x}, \bar{y} \in I_2$ berlaku $|\bar{x} - \bar{y}| < 2^{-2}\delta$ (diagonal I_2 = $\frac{1}{2}$ diagonal I_1)

$\vdots$

jika $\bar{x}, \bar{y} \in I_n$ berlaku $|\bar{x} - \bar{y}| < 2^{-n}\delta$ (diagonal I_n = $\frac{1}{2}$ diagonal I_{n-1})

Dari (a) dan berdasarkan teorema 11 maka terdapat $\bar{x}^* \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan karena $\{G_\alpha\}$ selimut terbuka untuk I maka $\bar{x}^* \in G_\alpha$ untuk suatu α. Karena G_α himpunan terbuka maka $\bar{x}^*$ merupakan titik interior G_α artinya terdapat bilangan $r > 0$ sehingga $|\bar{x}^* - \bar{y}| < r$ untuk setiap $\bar{y} \in G_\alpha$. Diambil n yang cukup besar sehingga $2^{-n}\delta < r$ maka berdasarkan [c] diperoleh $|\bar{x} - \bar{y}| < r$ untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in I_n$. Dengan kata lain $I_n \subset G_\alpha$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan hal ini kontradiksi dengan (b). Jadi pengandaian salah dan haruslah I kompak.

Teorema 13

Jika $E \subset R^k$ maka pernyataan berikut equivalen

(a) E tertutup dan terbatas

(b) E kompak

(c) Setiap himpunan bagian tak berhingga pada E mempunyai titik limit di E.

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Karena E terbatas maka E termuat dalam suatu sel I yang kompak (teorema 12). Akibatnya E merupakan himpunan bagian tertutup dalam himpunan kompak I dan berdasarkan teorema 5 maka E kompak.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Misal F himpunan bagian tak berhingga didalam E yang kompak maka berdasarkan teorema 9, F mempunyai titik limit di E.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Diketahui setiap himpunan bagian tak berhingga dalam E mempunyai titik limit di E. Akan diperlihatkan E tertutup dan terbatas.

(i) E terbatas di R^k jika terdapat $M \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\overline{x} \in E$ dan suatu $\overline{y} \in R^k$ berlaku $|\overline{x} - \overline{y}| \leq M$. Andaikan E tidak terbatas maka ada $\overline{x}_n \in E$ sehingga $\overline{x}_n > n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan suatu $\overline{y}_n = \theta \in R^k$.

Dibentuk $S = \{\overline{x}_n : \overline{x}_n \in E, |\overline{x}_n| > n, n \in N\}$ maka $S \subset E$, S tak berhingga dan tidak mempunyai titik limit di E. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa setiap himpunan bagian tak berhingga dalam E mempunyai titik limit di E. Jadi pengandaian salah dan haruslah E terbatas.

(ii) Andaikan E tidak tertutup di R^k maka ada $\overline{x}_0 \in R^k$ titik limit E dengan $\overline{x}_0 \notin E$. Diambil $r_1 = 1$ maka ada $\overline{x}_1 \in E$ dengan $|\overline{x}_1 - \overline{x}_0| < 1$

$r_2 = \frac{1}{2}$ maka ada $\overline{x}_2 \in E$ dengan $|\overline{x}_2 - \overline{x}_0| < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$r_n = \frac{1}{n}$ maka ada $\overline{x}_n \in E$ dengan $|\overline{x}_n - \overline{x}_0| < \frac{1}{n}$

$\vdots$

Dibentuk himpunan $S = \left\{\overline{x}_n : \overline{x}_n \in E, |\overline{x}_n - \overline{x}_0| < \frac{1}{n}\right\}$ maka S himpunan bagian tak berhingga pada E dan hanya mempunyai satu titik limit yaitu $\overline{x}_0$ dengan $\overline{x}_0 \notin E$. Jadi S himpunan bagian tak berhingga pada E dan tidak mempunyai titik limit di E. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi pengandaian salah dan haruslah E tertutup.

Teorema 14 (Teorema Heine-Borel)

$E \subset R^k$ kompak jika dan hanya jika E tertutup dan terbatas.

Bukti:
Syarat cukup ($\Leftarrow$) sudah dibuktikan pada teorema 13 (a) $\Rightarrow$ (b)
Syarat perlu ($\Rightarrow$)

(i) Akan diperlihatkan E tertutup yaitu E mengandung seluruh titik limitnya. Misal p sebarang titik limit E maka untuk setiap persekitaran $N_r(p)$ berlaku $N_r(p) \setminus \{p\} \cap E \neq \phi$. Akibatnya $N_r(p) \cap E \neq \phi$ untuk setiap bilangan r > 0. Jadi terdapat q∈E dan $q \in N_r(p) = \{x : |x - p| < r\}$ yang berakibat $|q - p| < r$ untuk setiap r > 0 atau q = p ∈ E. Karena p sebarang titik limit dari E maka E mengandung seluruh titik limitnya. Dengan kata lain E tertutup.

(ii) Akan ditunjukkan E terbatas yaitu setiap $\overline{x} \in E$ dan suatu $\overline{y} \in R^k$ berlaku $|\overline{x} - \overline{y}| < M$. Diambil $\overline{x} \in E$ sebarang dan kemudian dibentuk persekitaran $N_r(\overline{x}) = \{\overline{y} : \overline{y} \in R^k, |\overline{x} - \overline{y}| < r\}$ maka keluarga $\{N_r(\overline{x})\}$ merupakan selimut terbuka untuk E. Karena E kompak maka terdapat $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n$ sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_r(\overline{x}_i)$. Diambil $M = \text{maks}\ \{|\overline{x} - \overline{y}| : \overline{x}, \overline{y} \in N_r(\overline{x}_i), i = 1,2, \cdots, n\}$ maka untuk setiap $\overline{x} \in E$ dan suatu $\overline{y} \in R^k$ berlaku $|\overline{x} - \overline{y}| < M$. Hal ini berarti E terbatas.

Teorema 15 (Teorema Bolzano-Weierstrass)

Setiap himpunan tak berhingga dan terbatas di R^k mempunyai titik limit di R^k.

Bukti:
Misal E himpunan tak berhingga dan terbatas di R^k maka E termuat dalam suatu sel I yang kompak dan berdasarkan teorema 9, maka E mempunyai titik limit pada I dengan $I \subset R^k$. Jadi E mempunyai titik limit di R^k.

Contoh

(a) Jika A = (0, 1] ⊂ R, apakah A kompak ?

Jawab :

A tidak kompak sebab ada selimut terbuka $\{G_n\}$ untuk A yang tidak memuat selimut bagian berhingganya untuk A, yaitu $G_n = \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$, n = 1, 2, …

Jelas $A \subset \bigcup_n G_n = (0,2)$ tetapi $A \not\subset \bigcup_{n=1}^{k} G_n$ sebab $\frac{1}{k} \in A$, k = 1, 2, … , tetapi $\frac{1}{k} \notin \bigcup_{n=1}^{k} G_n = \left(\frac{1}{k}, 2\right)$.

(b) Apakah $F = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ kompak ?

Jawab :

Himpunan titik limit dari F adalah $F' = \{0\}$. Jadi F mengandung semua titik limitnya dan berarti F tertutup. Dilain pihak F juga terbatas oleh [0, 1] dan berdasarkan teorema 14 (teorema Heine Borel) maka F adalah kompak.

Kesimpulan

Dengan menggunakan definisi kompak kita dapat menentukan apakah suatu himpunan kompak atau tidak, tetapi cara yang lebih mudah adalah dengan menggunakan teorema Heine-Borel yaitu suatu himpunan E pada ruang metrik (X,d) adalah kompak jika dan hanya jika E tertutup dan terbatas. Dengan memeriksa ketertutupan dan keterbatasan suatu himpunan maka kita dapat menentukan kekompakan suatu himpunan.

Daftar Pustaka

Apostol, T.M. (1974). ***Mathematical Analysis*** (Second Edition). Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Philippines.

Bartle, R.G. (1976). ***The Elements Of Real Analysis*** (Second Edition). John Wiley & Sons, Inc. USA.

Munkres, J.R. (1975). ***Topologi*** (A First Course). Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey. USA.

Rudin, W. (1976). ***Principles of Mathematical Analysis*** (Third Edition). McGraw-Hill. Singapore.